

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Sea B la fórmula $\exists x \forall y (x \cdot y = a)$ de un lenguaje de primer orden. Sea i , la interpretación sobre el dominio de los números naturales (positivos y el cero), con \cdot el producto ordinario. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifica la respuesta en todos los casos

- a) La interpretación i con $i(a) = 1$ es modelo de la fórmula dada.
- b) No existe interpretación que sea modelo de B.
- c) El sistema de deducción natural es completo porque toda fórmula bien formada puede deducirse en él.

2. Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio $\{1,2,3\}$:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

3. Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas:

- 1. $\forall x \forall z (p(a) \leftrightarrow (q(x, f(z)) \wedge q(f(x), z)))$
- 2. $\forall x \exists y s(y,x) \wedge \neg \exists x \exists y (\exists z (s(z,x) \wedge s(z,y)))$
- 3. $\forall x \forall y ((\neg p(x,y) \rightarrow q(y)) \wedge (p(x,y) \rightarrow r(y)))$

4. Definir detalladamente dos interpretaciones, ambas sobre el dominio $\{\square, \Delta\}$, una que verifique y otra que falsee la siguiente fórmula:

$$\text{Algunos votantes no confían en Obama:} \quad \exists x (V(x) \wedge \neg C(x,a))$$

5. Sea L el lenguaje $\{R, a, b, c\}$, donde $R(x,y)$ es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

$$\forall x \exists y R(x, f(y)) \not\models \exists y \forall x R(x, f(y))$$

6. Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica no se verifica:

$$\{ \forall x (P(x) \rightarrow R(x)), \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), P(a), Q(b) \} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

7. Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

- a) $\{ \forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a) \} \models \exists x \forall z P(x,z)$
- b) $\{ \forall x P(x) \rightarrow Q(c) \} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

Sea B la fórmula $\exists x \forall y (x \cdot y = a)$ de un lenguaje de primer orden. Sea i , la interpretación sobre el dominio de los números naturales (positivos y el cero), con \cdot el producto ordinario. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifica la respuesta en todos los casos

- a) La interpretación i con $i(a) = 1$ es modelo de la fórmula
 - b) No existe interpretación que sea modelo de B
 - c) El sistema de deducción natural es completo porque toda fórmula bien formada puede deducirse en él
-

- a) INCORRECTO. No existe ningún número que multiplicado por cualquier número siempre sea igual a 1.
- b) INCORRECTO. La interpretación i con $i(a) = 0$ es modelo, ya que el 0 multiplicado por cualquier número es igual a 0.
- c) INCORRECTO. Es completo porque toda fórmula válida puede deducirse en él.

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio $\{1,2,3\}$:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Definimos una interpretación $I(D, i())$ en el dominio $\{1,2,3\}$

Tendremos tres constantes en el lenguaje de primer orden que utilizaremos $L=\{a,b,c\}$

Definimos la función de interpretación $i()$

Función de interpretación para las constantes:

$$i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3$$

Función de interpretación para las funciones:

$$i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c$$

Función de interpretación para los predicados:

$$i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c)) =$$

$$i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =$$

$$i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =$$

$$i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =$$

Buscamos un **Modelo**, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

sii

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V \quad \text{y} \quad i(\neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V \text{ sii}$$

$$z=a \quad i(\neg Q(f(a))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(a))) = F$$

o bien

$$z=b \quad i(\neg Q(f(b))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(b))) = F$$

o bien

$$z=c \quad i(\neg Q(f(c))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(c))) = F$$

$$i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V \quad \text{sii} \quad \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))) = F$$

$$z=a \quad i(\forall y P(a,y) \rightarrow Q(f(a))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(a,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(a))) = F$$

$$i(P(a,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(a,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(a,c))=V$$

y

$$z=b \quad i(\forall y P(b,y) \rightarrow Q(f(b))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(b,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(b))) = F$$

$$i(P(b,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(b,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(b,c))=V$$

y

$$z=c \quad i(\forall y P(c,y) \rightarrow Q(f(c))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(c,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(c))) = F$$

$$i(P(c,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(c,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(c,c))=V$$

Modelo: $i(Q(a)) = F$, $i(Q(b)) = F$, $i(Q(c)) = F$, $i(P(a,a)) = V$, $i(P(a,b)) = V$, $i(P(a,c)) = V$, $i(P(b,a)) = V$, $i(P(b,b)) = V$, $i(P(b,c)) = V$, $i(P(c,a)) = V$, $i(P(c,b)) = V$, $i(P(c,c)) = V$

Contramodelo

Buscamos un **ContraModelo**, una interpretación que haga falsa la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z, y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$$

sii

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = F \quad \text{o bien} \quad i(\neg \exists z (\forall y P(z, y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$$

$$i(\exists z \neg Q(f(x))) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad i(\neg Q(f(a))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(a))) = V$$

y

$$z=b \quad i(\neg Q(f(b))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(v))) = V$$

y

$$z=c \quad i(\neg Q(f(c))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(c))) = V$$

Contramodelo: **$i(Q(f(a))) = V, i(Q(f(b))) = V, i(Q(f(c))) = V$**

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x \forall z (p(a) \leftrightarrow (q(x, f(z)) \wedge q(f(x), z)))$
 2. $\forall x \exists y s(y, x) \wedge \neg \exists x \exists y (\exists z (s(z, x) \wedge s(z, y)))$
 3. $\forall x \forall y ((\neg p(x, y) \rightarrow q(y)) \wedge (p(x, y) \rightarrow r(y)))$
-

Se usará siempre los números naturales como dominio de las interpretaciones.

1. $\forall x \forall z (p(a) \leftrightarrow (q(x, f(z)) \wedge q(f(x), z)))$
 - modelo: basta definir p como un predicado que vale para todo número, y q como predicado que vale para toda pareja de números.
 - contramodelo: basta decir que $I(a) = 0$ y modificar p para que no valga en 0.
2. $\forall x \exists y s(y, x) \wedge \neg \exists x \exists y (\exists z (s(z, x) \wedge s(z, y)))$
 - modelo: no existe
 - contramodelo: una I donde s es falso siempre
3. $\forall x \forall y ((\neg p(x, y) \rightarrow q(y)) \wedge (p(x, y) \rightarrow r(y)))$
 - modelo: una interpretación donde q es falso siempre , p es verdadero siempre, r es verdadero siempre.
 - contramodelo: una interpretación donde q es verdadero siempre.

Defina *detalladamente* dos interpretaciones, ambas sobre el dominio $\{\square, \Delta\}$, una que verifique y otra que false la siguiente fórmula:

Algunos votantes no confían en Obama: $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$

Dado que $L = \{a, V^1, C^2\}$ y $D = \{\square, \Delta\}$, $L(D) = L \cup \{b\}$



Ampliación de L

Sea $I_1 = \langle D, i \rangle$

$i(a) = \square$, $i(b) = \Delta$

$i(V^1) = \{\langle \square \rangle, \langle \Delta \rangle\}$, $i(C^2) = \{\langle \square, \Delta \rangle, \langle \Delta, \square \rangle\}$

$i(\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))) = V$ sii



Análisis correcto de \exists

$i(V(a) \wedge \neg C(a,a)) = V$ sii $i(V(a)) = V$ y $i(\neg C(a,a)) = V$

$i(V(a)) = V$ sii $\langle i(a) \rangle \in i(V^1)$; $\langle \square \rangle \in \{\langle \square \rangle, \langle \Delta \rangle\}$

$i(\neg C(a,a)) = V$ sii $i(C(a,a)) = F$ sii $\langle i(a), i(a) \rangle \notin i(C^2)$; $\langle \square, \square \rangle \notin \{\langle \square, \Delta \rangle, \langle \Delta, \square \rangle\}$



Análisis detallado

Queda demostrado que I_1 verifica la fórmula $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$.

Sea $I_2 = \langle D, i' \rangle$, siendo $i'()$ idéntica a $i()$ excepto en que $i'(V^1) = \emptyset$

$i(\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))) = F$ sii



Análisis correcto de \exists

$i(V(a) \wedge \neg C(a,a)) = F$ sii $i(V(a)) = F$ o $i(\neg C(a,a)) = F$

$i(V(a)) = F$ sii $\langle i(a) \rangle \notin i(V^1)$; $\langle \square \rangle \notin \emptyset$

y

$i(V(b) \wedge \neg C(b,a)) = F$ sii $i(V(b)) = F$ o $i(\neg C(b,a)) = F$



Análisis detallado

$i(V(b)) = F$ sii $\langle i(b) \rangle \notin i(V^1)$; $\langle \Delta \rangle \notin \emptyset$

Queda demostrado que I_2 falsa la fórmula $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$.

Sea L el lenguaje $\{ R, a, b, c \}$, donde $R(x,y)$ es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

$$\forall x \exists y R(x, f(y)) \neq \exists y \forall x R(x, f(y))$$

Justificar adecuadamente la respuesta con un análisis semántico.

$$A \equiv \forall x \exists y R(x, f(y))$$

$$B \equiv \exists y \forall x R(x, f(y))$$

Hay que encontrar un contramodelo, es decir, una interpretación i tal que $i(A) = V$ y $i(B) = F$

Probamos con dominio $D = \{a, b\}$, y $f: D \longrightarrow D$ la función identidad, $f(x) = x \quad \forall x$

Hay que determinar $R \subset D \times D$.

$$\begin{aligned} i(B) = F &\longrightarrow \exists y \forall x R(x, f(y)) = F \longrightarrow \neg (\exists y \forall x R(x, f(y))) = V \longrightarrow \forall y \exists x \neg R(x, f(y)) = F \\ &\longrightarrow \forall y \exists x R(x, y) = F \end{aligned}$$

$$y = a \quad \exists x R(x, a) = F \quad R(b, a) = F \text{ por ejemplo} \quad (1)$$

$$y = b \quad \exists x R(x, b) = F \quad R(a, b) = F \text{ por ejemplo} \quad (2)$$

$$i(A) = V \longrightarrow \forall x \exists y R(x, f(y)) = V \longrightarrow \forall x \exists y R(x, y) = V$$

$$x = a \quad \exists y R(a, y) = V \quad \text{teniendo en cuenta (2)} \quad R(a, a) = V$$

$$x = b \quad \exists y R(b, y) = V \quad \text{teniendo en cuenta (1)} \quad R(b, b) = V$$

Queda por tanto : $R = \{ (a, a), (b, b) \}$

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica no se verifica:

$$\{ \forall x (P(x) \rightarrow R(x)), \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), P(a), Q(b) \} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow R(x))}{A_1} \quad \frac{\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))}{A_2} \quad \frac{P(a)}{A_3} \quad \frac{Q(b)}{A_4} \quad \frac{}{B} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

- Buscamos una interpretación i tal que

$$\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

$$\forall x (Q(x) \rightarrow R(x)) \quad \text{son} \quad V \quad \text{y} \quad \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{es} \quad F$$

$$P(a)$$

$$Q(b)$$

- Tomamos como dominio $D = \{a, b\}$

$$- A_3 = V \longrightarrow \boxed{P(a) = V}$$

$$- A_4 = V \longrightarrow \boxed{Q(b) = V}$$

$$- A_1 \equiv \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) = V$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a \quad P(a) \rightarrow R(a) = V \\ \quad \quad P(a) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{R(a) = V}$$

$$x = b \quad P(b) \rightarrow R(b) = V \longrightarrow P(b) = F \quad \text{ó} \quad R(b) = V \quad (1)$$

$$- A_2 \equiv \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)) = V$$

$$x = a \quad Q(a) \rightarrow R(a) = V \quad \text{se cumple pues } R(a) = V$$

$$\left. \begin{array}{l} x = b \quad Q(b) \rightarrow R(b) = V \\ \quad \quad Q(b) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{R(b) = V}$$

por tanto, (1), A_1 es V para $x = b$, y por tanto A_1 es V

$$- B \equiv \exists x (P(x) \wedge Q(x)) = F \quad \text{sii} \quad \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)) = V \quad \text{sii} \quad \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) = V$$

$$\begin{array}{lcl} x = a & \neg P(a) \vee \neg Q(a) = V & \longrightarrow \neg Q(a) = V \longrightarrow \boxed{Q(a) = F} \\ & P(a) = V \rightarrow \neg P(a) = F & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = b & \neg P(b) \vee \neg Q(b) = V & \longrightarrow \neg P(b) = V \longrightarrow \boxed{P(b) = F} \\ & Q(b) = V \rightarrow \neg Q(b) = F & \end{array}$$

- Hemos encontrado un contramodelo:
que además es el único contramodelo

$$P_D = \{a\} \quad Q_D = \{b\} \quad R_D = \{a, b\}$$

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

- a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \models \exists x \forall z P(x,z)$
 b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$
-

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las argumentaciones. Buscamos contramodelos con dominio $D = \{a,b,c\}$

- a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \models \exists x \forall z P(x,z)$

Premisas

$$\forall z \exists x P(x,z) = V$$

$$z = a \quad \exists x P(x,a) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad \mathbf{P(a,a)=V}$$

$$o \quad x = b \quad P(b,a)=V$$

$$o \quad x = c \quad P(c,a)=V$$

$$y \quad z = b \quad \exists x P(x,b) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad P(a,b)=V$$

$$o \quad x = b \quad \mathbf{P(b,b)=V}$$

$$o \quad x = c \quad P(c,b)=V$$

$$y \quad z = c \quad \exists x P(x,c) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad P(a,c)=V$$

$$o \quad x = b \quad P(b,c)=V$$

$$o \quad x = c) \quad \mathbf{P(c,c)=V}$$

$$y \quad \exists x P(x,a) = V$$

$$x = a \quad \mathbf{P(a,a)=V}$$

- o $x=b$ $P(b,a)=V$
- o $x=c$ $P(c,a)=V$

Conclusión

$$\exists x \forall z P(x,z) = F$$

$$x=a \quad \forall z P(a,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad P(a,a)=F$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad \mathbf{P(a,b)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(a,c)=F$$

$$\text{y} \quad x=b \quad \forall z P(b,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad \mathbf{P(b,a)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad P(b,b)=F$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(b,c)=F$$

$$\text{y} \quad x=c \quad \forall z P(c,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad \mathbf{P(c,a)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad P(c,b)=F$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(c,c)=F$$

Existe al menos un contramodelo ($P(a,a)=V$ y $P(b,b)=V$ y $P(c,c)=V$; $P(a,b)=F$ y $P(b,a)=F$ y $P(c,a)=F$), luego no hay consecuencia lógica.

$$b) \quad \{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$$

Premisas

$$\forall x P(x) \rightarrow Q(c) = V \text{ sii}$$

$$\forall x P(x) = F \quad \text{sii}$$

$$x= a \quad P(a) = F$$

$$\text{o} \quad x= b \quad P(b) = F$$

$$\text{o} \quad x=c \quad P(c) = F$$

$$\text{o} \quad Q(c)=V$$

Conclusión

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c)) = F \text{ sii}$$

$$x=a \quad P(a) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(a)=V \text{ y } Q(c)=F$$

$$\text{y} \quad x=b \quad P(b) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(b)=V \text{ y } Q(c)=F$$

$$\text{y} \quad x=c \quad P(c) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(c)=V \text{ y } Q(c)=F$$

Analizamos las opciones:

$Q(c)=V$ en la premisa es incompatible con $Q(c)=F$ que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.

$P(a)=F$ en la premisa es incompatible con $P(a)=V$ que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. $P(b)=F$ en la premisa es incompatible con $P(b)=V$ que debe cumplirse en la segunda alternativa de la conclusión. $P(c)=F$ en la premisa es incompatible con $P(c)=V$ que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.

No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.